Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Michal Stacho

Finanční funkce systému Mathematica

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	doc. RNDr. Jan Hurt CSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční matematika

Praha 2012

Na tomto mieste by som sa chcel poďakovať doc. RNDr. Janu Hurtovi CSc., vedúcemu mojej bakalárskej práce, za jeho ochotu, cenné rady a pripomienky. Zároveň ďakujem Matematicko-fyzikálnej fakulte UK v Prahe za poskytnutie licencie k používanému softvéru Wolfram Mathematica 8.0.4. Ďalej by som sa chcel poďakovať mojim rodičom, ktorí ma pri štúdiu plne podporujú a poskytujú mi potrebné zázemie.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 2.8.2012 Michal Stacho

Názov práce: Finanční funkce systému Mathematica

Autor: Michal Stacho

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci bakalárskej práce: doc. RNDr. Jan Hurt CSc.

Abstrakt: Súčasťou softvéru Mathematica je plne integrovaná podpora pre veľké množstvo nástrojov používaných v klasických i moderných financiách. Medzi jej základné schopnosti v oblasti financií patrí pokročilý výpočet časovej hodnoty peňazí, oceňovanie finančných inštrumentov ako sú obligácie alebo finančné deriváty a pokročilé finančné mapovanie s knižnicou technických ukazovateľov. Mathematica taktiež poskytuje okamžitý prístup k veľkému poľu finančných a ekonomických dát prostredníctvom externých serverov a ponúka finančné nástroje pre prácu s externými dátami. Táto bakalárska práca sa zaoberá popísaním finančných funkcií obsiahnutých v Mathematice, vysvetlením princípu ich fungovania a aplikáciou na reálne dáta.

Kľúčové slová: Mathematica, anuita, obligácia, finančné deriváty, finančné dáta

Title: Financial functions in Mathematica

Author: Michal Stacho

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Jan Hurt CSc.

Abstract: The Mathematica software contains a fully integrated environment for a large number of instruments used in classical and modern finance. One of it‘s basic capabilities is an advanced evaluation of the time value of money, then pricing of financial instruments such as bonds or financial derivatives and finally financial mapping with advanced library of technical indicators. Mathematica also provides immediate access to a large field of financial and economic data through external servers and offers financial tools for working with external data. This thesis deals with descriptions of the functions implemented in Mathematica, explaining the principle of their operation and application to real data.

Keywords: Mathematica, annuity, financial bond, financial derivatives, financial data

Obsah

Úvod

Finančný trh je trh, na ktorom finanční sprostredkovatelia prostredníctvom finančných nástrojov zabezpečujú pohyb kapitálu medzi jednotlivými ekonomickými subjektami. Finančné funkcie sú silným prostriedkom na oceňovanie finančných nástrojov, čo sa využíva pri vytváraní finančných rozhodnutí. Oceňovanie týchto nástrojov nie je vždy najjednoduchšie a v dnešnej modernej dobe je to väčšinou úloha výpočtovej techniky. Asi najkomplexnejším nástrojom, ktorý zvláda túto činnosť je systém Mathematica.

Cieľom tejto práce je priblíženie finančných funkcií podporovaných softvérom Mathematica. Práca je členená do 3 kapitol. Každá kapitola obsahuje niekoľko podkapitol venovaných rôznej problematike, pričom vždy najprv zadefinujeme problematiku ktorou sa ideme zaoberať, uvedieme všeobecne používané značenie, bližsie sa pozrieme na vzťahy ktoré pre daný nástroj platia. Potom sa zaoberáme implementáciou daného nástroja v Mathematice. Snažíme sa preveriť či pre všeobecné vstupy dávajú zabudované funkcie výsledky aké sme zadefinovali teoreticky. Na záver každej časti aplikujeme funkcie na reálne dáta, kde opäť porovnávame výstupy v Mathematice s výstupmi získanými klasickými výpočtami. Ďalej uvádzame aj prípadné ilustrácie k danej problematike.

Prvá kapitola sa zaoberá nástrojom časová hodnota a inštrumentami s ňou súvisiacimi. V tejto kapitole sú definované a uvedené princípy a vzťahy nástrojov ako peňažný tok, súčasná hodnota, budúca hodnota, predlehotná anuita, polehotná anuita, perpetuita alebo efektívna úroková miera. Následne je vysvetlená ich implementácia v Mathematice.

Druhá kapitola je zameraná na finančné inštrumenty. Najskôr sú definované obligácie ako základné cenné papiere s pevným výnosom. Venujeme sa ich klasifikácií a oceňovaní k rôznym dátumom. Uvedený je výpočet spravodlivej ceny obligácie v čase emisie, v čase výplaty niektorého z kupónov alebo v dobe medzi jednotlivými kupónami. Možnosti funkcie, ktorá umožňuje prácu s obligáciami sú aplikované na triviálne aj netriviálne príklady. Druhým dôležitým inštrumentom, ktorý je v tejto kapitole rozoberaný sú finančné deriváty. Finančným derivátom je v tejto práci venovaný najväčší priestor vzhľadom k ich množtvu druhov a zložitosti pri ich oceňovaní. Konkrétne sa budeme venovať najpoužívanejším derivátom, ktorým sú opcie. Európske opcie oceníme pomocou Black-Scholesovej metódy, americké opcie pomocou binomického modelu. Následne ukážeme postup, ktorý využíva Mathematica. Pri finančných derivátoch sa ďalej pozrieme aj na význam implikovanej a historickej volatility, či prevedieme analýzu citlivosti.

Tretia kapitola venuje pozornosť finančným a ekonomickým dátam, ktoré je Mathematica schopná získať prostredníctvom zabudovaných funkcií z externých serverov. Medzi tieto informácie radíme napríklad ceny akcií, burzové indexy, výmenné kurzy alebo rôzne ekonomické dáta jednotlivých krajín ako napríklad hrubý domáci produkt, Giniho koeficient, mieru nezamestnanosti v krajine alebo množstvo ďalších údajov.

Pri zhotovovaní tejto práce som používal softvér *Wolfram Mathematica 8.0 for Students*.

1. Výpočet časovej hodnoty

1.1 Peňažné toky

Definícia 1.1. *Peňažný tok (CF)* je súbor platieb týkajúci sa jednotlivých operácií v rôznych časoch v rámci určitého finančného, investičného alebo obchodného projektu. V peňažnom toku rozlišujeme dva druhy platieb:

- príjmy (s kladnými znamienkami vo vzorcoch),
- výdaje (so zápornými znamienkami vo vzorcoch).

Implementácia v Mathematice

$$\mathbf{Cashflow}[\{\mathbf{c_0}, \mathbf{c_1}, ..., \mathbf{c_n}\}]$$

predstavuje postupnosť peňažných tokov $c_0, ..., c_n$, ktoré sa uskutočňujú v pravidelných jednotkových intervaloch.

$$\mathbf{Cashflow}[\{\mathbf{c_0}, \mathbf{c_1}, ..., \mathbf{c_n}\}, \mathbf{q}]$$

predstavuje postupnosť peňažných tokov vznikajúcich v časových intervaloch dĺžky q.

$$\mathbf{Cashflow}[\{\{\mathbf{time_1}, \mathbf{c_1}\}, \{\mathbf{time_2}, \mathbf{c_2}\}, ...\}]$$

predstavuje postupnosť peňažných tokov vznikajúcich v určených časoch $time_1$, $time_2, ...$

1.2 Súčasná a budúca hodnota

Definícia 1.2. *Súčasná hodnota peňazí (PV)* predstavuje hodnotu, ktorú majú peniaze v definovanom súčasnom termíne (danom momente, $t = 0$), pri zohľadnení úrokovej miery, charakteru vkladu (pravidelne, v rovnakej výške, v rôznej výške, v rôznych termínoch vkladania a pod.) a ďalšieho termínovania.

Definícia 1.3. *Budúca hodnota peňazí (FV)* predstavuje hodnotu, ktorú dosiahnu peniaze v definovanom budúcom termíne, pri zohľadnení úrokovej miery, charakteru vkladu (pravidelne, v rovnakej výške, v rôznej výške, v rôznych termínoch vkladania a pod.) a ďalšieho termínovania. Vo všeobecnosti môžeme povedať, že sa jedná o vklady a sporenie.

Definícia 1.4. *Spotová úroková sadzba* je okamžite platná úroková sadzba, zjednaná na určitú dobu v rámci finančnej transakcie, ktorá platí po zjednanú dobu od súčasného okamihu. *Forwardová úroková sadzba* je úroková sadzba platná v nejakom budúcom termíne, ktorá platí po zjednanú dobu od dohodnutého budúceho okamihu.

Medzi spotovou a forwardovou úrokovou sadzbou existuje jednoznačne určený vzťah (viď [3])

$$(1 + s_n)^n (1 + f_{n,k})^k = (1 + s_{n+k})^{n+k}, \tag{1.1}$$

kde s_n je spotová úroková miera na n rokov, $f_{n,k}$ je forwardová úroková miera od roku n do roku $n+k$.

Súčasnú hodnotu peňažného toku CF_0, CF_1,..., CF_n možno vyjadriť pomocou spotových aj forwardových úrokových sadzieb podľa nasledujúcich vzťahov (viď [3]).

$$PV = CF_0 + \frac{CF_1}{1+s_1} + ... + \frac{CF_n}{(1+s_n)^n} = \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{(1+s_t)^t} \tag{1.2}$$

$$PV = CF_0 + \frac{CF_1}{1+f_{0,1}} + \frac{CF_2}{(1+f_{0,1})(1+f_{1,1})} + ... + \frac{CF_n}{(1+f_{0,1})(1+f_{1,1})...(1+f_{n-1,1})} =$$

$$= \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{\prod_{k=1}^{t}(1+f_{k-1,1})} \tag{1.3}$$

Obdobne môžeme vyjadriť aj *budúcu hodnotu* peňažného toku CF_0, CF_1,..., CF_n pomocou spotových aj forwardových úrokových sadzieb (viď [3]).

$$FV = CF_0(1+s_n)^n + CF_1(1+s_{n-1})^{n-1} + ... + CF_n = \sum_{t=0}^{n} CF_t(1+s_{n-t})^{n-t} \tag{1.4}$$

$$FV = CF_0(1+f_{0,1})(1+f_{1,1})...(1+f_{n-1,1}) + ... + CF_{n-1}(1+f_{n-1,1}) + CF_n =$$

$$= \sum_{t=0}^{n} CF_t \prod_{k=t+1}^{n} (1+f_{k-1,1}) \tag{1.5}$$

Implementácia v Mathematice

TimeValue[**a, i, -t**]

dáva pre jednoduchú čiastku a a efektívnu úrokovú sadzbu i súčasnú/diskontovanú hodnotu čiastky a pri efektívnej úrokovej sadzbe i.

$$\frac{a}{(1+i)^t}$$

TimeValue[**a, i, t**]

dáva pre jednoduchú čiastku a budúcu hodnotu čiastky a v čase t.

$$a(1+i)^t$$

TimeValue[**a, i & , t**]

spojito úročí jednoduchú čiastku a a tým uvádza jej budúcu hodnotu v čase t.

$$ae^{it}$$

Čas t môže byť zadaný v abstraktných jednotkách alebo v dátumoch, jednoduchá čiastka môže byť nahradená peňažným tokom alebo anuitou. Napríklad

$$\mathbf{TimeValue[Cashflow[\{CF_0, CF_1, CF_2, CF_3, CF_4, CF_5\}], i, 0]}$$

na výstupe dá

$$CF_0 + \frac{CF_1}{1+i} + \frac{CF_2}{(1+i)^2} + \frac{CF_3}{(1+i)^3} + \frac{CF_4}{(1+i)^4} + \frac{CF_5}{(1+i)^5}.$$

Úroková sadzba i môže byť vyjadrená ako efektívna úroková sadzba (r), zoznam sadzieb aplikovaných cez jednotlivé časové intervaly $(\{r_1, r_2, ...\})$, zoznam mier meniacich sa v špecifický čas $(\{\{t_1, r_1\}, \{t_2, r_2\}, ...\})$ alebo prostredníctvom určitej funkcie (f). Napríklad súčasná hodnota peňažného toku CF_0, CF_1, CF_2, CF_3, CF_4 vyjadrená pomocou forwardových úrokových sadzieb $f_{0,1}$, $f_{1,2}$, $f_{2,3}$, $f_{3,4}$ sa získa z príkazu

$$\mathbf{TimeValue[Cashflow[\{CF_0, CF_1, CF_2, CF_3, CF_4\}], \{f_{0,1}, f_{1,2}, f_{2,3}, f_{3,4}\}, 0]},$$

ktorý na výstupe podľa vzorca (1.3) dá

$$CF_0 + \frac{CF_1}{1+f_{0,1}} + \frac{CF_2}{(1+f_{0,1})(1+f_{1,2})} + \frac{CF_3}{(1+f_{0,1})(1+f_{1,2})(1+f_{2,3})} +$$
$$+ \frac{CF_4}{(1+f_{0,1})(1+f_{1,2})(1+f_{2,3})(1+f_{3,4})}.$$

Podobným spôsobom vyjadríme súčasnú hodnotu peňažného toku CF_0, CF_1, CF_2, CF_3, CF_4 pomocou spotových úrokových sadzieb s_1, s_2, s_3, s_4 prostredníctvom príkazu

$$\mathbf{TimeValue[Cashflow[\{CF_0, CF_1, CF_2, CF_3, CF_4\}],}$$
$$\mathbf{\{1 \to s_1, 2 \to s_2, 3 \to s_3, 4 \to s_4\}, 0]},$$

ktorý na výstupe podľa vzorca (1.2) dá

$$CF_0 + \frac{CF_1}{1+s_1} + \frac{CF_2}{(1+s_2)^2} + \frac{CF_3}{(1+s_3)^3} + \frac{CF_4}{(1+s_4)^4}.$$

$$\mathbf{TimeValue}\,[\mathbf{a}, \mathbf{i}, \{\mathbf{t}, \mathbf{t_1}\}]$$

vypočíta časovú hodnotu nástroja/čiastky a nahromadenú alebo zdiskontovanú z času t_1 do času t za použitia úrokovej miery i, kde čas t resp. t_1 je možno zadať v tvare konkrétneho dátumu prostredníctvom predpisu {rok, mesiac, deň}. Výstup potom bude v tvare

$$a(1+i)^{-t+t_1}.$$

Aplikácia 1.1. Aká je súčasná hodnota kapitálu, ktorý za 3 roky vzrastie na 25 000 Kč pri úrokovej sadzbe 5, 5 % a spojitom úročení?

Riešenie: Počítame súčasnú hodnotu kapitálu, najprv klasickým výpočtom $PV = 25000e^{-3*0.055} = 21\,197,3$ Kč. Teraz v Mathematice

$$\mathbf{TimeValue[25000, 0.055\&, -3]} \Longrightarrow \mathbf{21\,197.3}\ \text{Kč}.$$

Záver: Súčasná hodnota kapitálu vyšla v oboch postupoch rovnako a to $21\,197,3$ Kč.

1.3 Anuita

Definícia 1.5. *Anuita* je séria platieb (splátok), ktoré sú opakované pravidelne v čase a majú rovnakú výšku, alebo dochádza k zmene podľa stanoveného harmonogramu. Jedná sa vlastne o pravidelne distribuovaný peňažný tok. Rozoznávame niekoľko typov anuít, pričom najčastejšie sa vyskytujúcimi sú:

- **Predlehotná anuita**
  Periodické platby sú uskutočňované na začiatku platobného obdobia.
- **Polehotná anuita**
  Periodické platby sú uskutočňované na konci platobného obdobia.
- **Perpetuita**
  Neexistuje zmluvou daná platnosť anuity.
- **Ročná anuita**
  Periódou platieb sú roky.
- **Mesačná anuita**
  Periódou platieb sú mesiace.

Pre potreby ďalšieho výkladu zavádzame nasledujúce všeobecne používané značenie:

$a_{\overline{n}\rvert}$	súčasná hodnota jednotkovej polehotnej anuity
$s_{\overline{n}\rvert}$	budúca hodnota jednotkovej polehotnej anuity
$\ddot{a}_{\overline{n}\rvert}$	súčasná hodnota jednotkovej predlehotnej anuity
$\ddot{s}_{\overline{n}\rvert}$	budúca hodnota jednotkovej predlehotnej anuity
P	platba
n	počet platieb
i	úrokova sadzba cez jedno platobné obdobie
$q = 1 + i$	úrokový faktor
$v = \frac{1}{1+i}$	diskontný faktor
$d = 1 - v = iv$	diskontná miera cez jedno platobné obdobie

Súčasnú a budúcu hodnotu jednotkovej polehotnej anuity možno vyjadriť pomocou diskontného faktora v a úrokového faktora q ako (viď [3])

$$a_{\overline{n}\rvert} = v + v^2 + ... + v^n = \frac{1 - v^n}{i} = v\frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{q^n - 1}{q^n(q - 1)}, \tag{1.6}$$

$$s_{\overline{n}|} = 1 + q + ... + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{i} = \frac{q^n - 1}{q - 1}. \tag{1.7}$$

Súčasnú a budúcu hodnotu jednotkovej predlehotnej anuity vyjadríme analogicky a dostaneme vzťahy (viď [3])

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + ... + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{d} = \frac{q^n - 1}{q^{n-1}(q - 1)} \tag{1.8}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = q + q^2 + ... + q^n = \frac{q^n - 1}{1 - v} = \frac{q^n - 1}{d} = q\frac{q^n - 1}{q - 1}. \tag{1.9}$$

Špeciálne pre súčasnú hodnotu *perpetuity* (predlehotnej i polehotnej) majú uvedené vzťahy tvar (viď [3])

$$a_{\overline{\infty}|} = v + v^2 + ... = \frac{1}{i} = \frac{1}{q - 1}, \tag{1.10}$$

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = 1 + v + ... = \frac{1}{1 - v} = \frac{1}{d} = \frac{q}{q - 1}. \tag{1.11}$$

Implementácia v Mathematice

$$\mathbf{Annuity}\left[\mathbf{p}, \mathbf{t}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}}\right]$$

reprezentuje polehotnú anuitu so stálymi platbami p vyplácanými počas t periód q-krát za periódu.

TimeValue[Annuity[P,n],i,0]

(PV polehotnej anuity) na výstupe dá (po úprave odpovedá vzorcu (1.6))

$$\frac{(1+i)^{-n}(-1 + (1+i)^n)P}{i} = Pa_{\overline{n}|}.$$

TimeValue[Annuity[P,n],i,n]

(FV polehotnej anuity) na výstupe dá (po úprave odpovedá vzorcu (1.7))

$$\frac{(-1 + (1+i)^n)P}{i} = Ps_{\overline{n}|}.$$

$$\mathbf{AnnuityDue}\left[\mathbf{p}, \mathbf{t}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}}\right]$$

reprezentuje predlehotnú anuitu so stálymi platbami p vyplácanými počas t periód q-krát za periódu.

TimeValue[AnnuityDue[P,n],i,0]

(PV predlehotnej anuity)na výstupe dá (po úprave odpovedá vzorcu (1.8))

$$\frac{(1+i)^{1-n}(-1+(1+i)^n)P}{i} = P\ddot{a}_{\overline{n}|}.$$

TimeValue[AnnuityDue[P,n],i,n]

(FV predlehotnej anuity) na výstupe dá (po úprave odpovedá vzorcu (1.9))

$$\frac{(1+i)(-1+(1+i)^n)P}{i} = P\ddot{s}_{\overline{n}|}.$$

TimeValue[Annuity[P,Infinity],i,0]

(PV polehotnej perpetuity) na výstupe dá (po úprave odpovedá vzorcu (1.10))

$$\frac{P}{i} = Pa_{\overline{\infty}|}.$$

TimeValue[AnnuityDue[P,Infinity],i,0]

(PV predlehotnej perpetuity) na výstupe dá (po úprave odpovedá vzorcu (1.11))

$$\frac{(1+i)P}{i} = P\ddot{a}_{\overline{n}|}.$$

Aplikácia 1.2. Mesačne ukladáme 250 Kč po dobu 5 rokov pri ročnej úrokovej miere 6% a mesačnom úrokovaní. Akú čiastku nasporíme ak uvažujeme

- splátky na začiatku mesiaca (predlehotná anuita),
- splátky na konci mesiaca (polehotná anuita)?

Riešenie: Ak najskôr počítame predlehotnú anuitu použijeme vyššie uvedené predpisy a dosadíme konkrétne hodnoty

$$\mathbf{TimeValue}\left[\mathbf{AnnuityDue}\left[\mathbf{250}, \mathbf{5}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}\right], \mathbf{EffectiveInterest}\left[\mathbf{0.06}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}\right], \mathbf{5}\right]$$

a získame výstup $17\,529, 7$. Pre polehotnú anuitu postupujeme obdobne

$$\mathbf{TimeValue}\left[\mathbf{Annuity}\left[\mathbf{250}, \mathbf{5}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}\right] \mathbf{EffectiveInterest}\left[\mathbf{0.06}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}\right], \mathbf{5}\right].$$

Tentokrát získame výstup $17\,442, 5$.

Záver: Predlehotne nasporíme $17\,529,7$ Kč, polehotne nasporíme $17\,442,5$ Kč, preto výhodnejšie bude sporiť predlehotne.

Aplikácia 1.3. Zobrali sme si hypotéku na dom v hodnote 2,5 milióna Kč. Mesačne splácame (polehotne) 16 000 Kč po dobu 25 rokov. Akú ročnú nominálnu úrokovú mieru nám poskytla banka?

Riešenie: Na vyriešenie tohoto problému využijeme predpis pre výpočet súčasnej hodnoty polehotnej anuity, na ktorý aplikujeme funkciu FindRoot pre vyjadrenie hotnoty neznámeho parametru i.

$$\mathbf{FindRoot[TimeValue[Annuity}\left[\mathbf{16\,000, 25, \frac{1}{12}}\right]\mathbf{, EffectiveInterest}\left[\mathbf{i, \frac{1}{12}}\right]\mathbf{, 0]}$$

$$\mathbf{== 2\,500\,000, \{i, 0.05\}]} \Longrightarrow \mathbf{\{i \to 0.0592952\}}$$

Záver: Banka nám poskytla ročnú nominálnu úrokovú mieru vo výške 5,93%.

1.4 Efektívna úroková miera

Definícia 1.6. V bežných bankových operáciách sa úroky počítajú niekoľkokrát do roka. Ročná úroková miera i, z ktorej je po každej m-tine roka splatná suma $\frac{i}{m}$, sa nazýva nominálna úroková miera. *Efektívna úroková miera* je ročná úroková miera, ktorá dáva za jeden rok rovnakú akumulovanú sumu ako zodpovedajúca nominálna úroková miera. Efektívna úroková miera nám umožňuje porovnávať rôzne nominálne úrokové miery na rovnaké časové obdobie, avšak s rôznou frekvenciou pripisovania úrokov. Platí $i_{ef} > i$.

Vzťah medzi efektívnou a nominálnou úrokovou mierou pri úročení m-krát do roka má tvar (viď [8])

$$i_{ef} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1. \tag{1.12}$$

Implementácia v Mathematice

$$\mathbf{EffectiveInterest}\left[\mathbf{i, \frac{1}{m}}\right]$$

(efektívna úroková sadzba zodpovedajúca nominálnej úrokovej sadzbe i pri m časových intervaloch v rámci jednej periódy, každý dĺžky $\frac{1}{m}$) na výstupe podľa vzorca (1.12) dá

$$\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1.$$

$$\mathbf{EffectiveInterest[i,0]}$$

špecifikuje spojité úročenie a na výstupe dá

$$e^i - 1.$$

Aplikácia 1.4. Ktorú peňažnú inštitúciu si vyberieme ak chceme svoj kapitál uložiť na dobu t rokov? K dispozícií máme 3 inštitúcie, ktoré ponúkajú

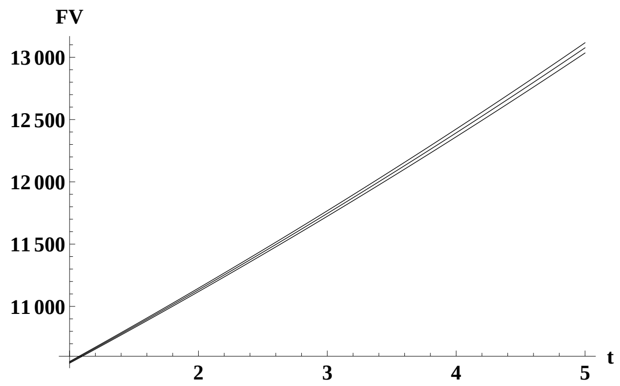
- úrokovú sadzbu 5,5 % p. a. s polročným pripisovaním úrokov,
- úrokovú sadzbu 5,4 % p. a. so štvrťročným pripisovaním úrokov,
- úrokovú sadzbu 5,3 % p. a. so spojitým úročením?

Riešenie: Postupne spočítame efektívne úrokové sadzby pre všetky tri inštitúcie a vyberieme tú, pre ktorú je sadzba najvyššia.

$$\{\mathbf{EffectiveInterest}\left[\mathbf{0.055}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right], \mathbf{EffectiveInterest}\left[\mathbf{0.054}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right],$$

$$\mathbf{EffectiveInterest}\,[\mathbf{0.053}, \mathbf{0}]\} \implies \{\mathbf{0.055756}, \mathbf{0.055103}, \mathbf{0.054429}\}$$

Na nasledujúcom grafe si môžeme overiť naše výpočty (pre počiatočnú čiastku 10 000 Kč) keďže je vidieť, že najvyšší výnos prináša taktiež prvá možnosť



Obr. 1.1: Vývoj budúcich hodnôt

Záver: Zvolíme prvú inštitúciu, pre ktorú je efektívna úroková sadzba $i_{ef} = 5,576\%$.

2. Finančné inštrumenty

2.1 Obligácie

Definícia 2.1. *Obligácie* sú dlhodobé dlhové cenné papiere, v ktorých emitent (vláda, banka alebo korporácia v pozícií dlžníka) sľubuje držiteľovi obligácie (v pozícií veriteľa) vyplácať pravidelne kupónovú platbu a k dátumu splatnosti vyplatiť aj nominálnu hodnotu obligácie. Kupónové platby sú vyplácané pravidelne na konci kupónových periód až do dátumu splatnosti (vrátane). Relatívne vyjadrenie kupónovej platby vzhľadom k nominálnej hodnote sa nazýva kupónová sadzba. Rozoznávame niekoľko základných typov obligácií:

- **Bezkupónové obligácie**
  V čase splatnosti je vyplatená len nominálna hodnota (žiadne pravidelné úroky), sú emitované s diskontom. V niektorých krajinách sú bežné hlavne z daňových dôvodov.
- **Konzoly (večné obligácie)**
  Neexistuje dátum splatnosti, a tak nieje nominálna hodnota nikdy splatená.
- **Obligácie s fixnou sadzbou**
  Majú kupónovú sadzbu, ktorá zostáva konštantná až do dátumu splatnosti.
- **Obligácie s premenlivou sadzbou**
  Majú kupónovú sadzbu, ktorej výška môže byť ovplyvnená rôznymi indikátormi (inflácia, referenčné úrokové sadzby (LIBOR, PRIBOR,...), likvidita trhu, ...).

Pre potreby ďalšieho výkladu zavádzame nasledujúce všeobecne používané značenie:

M	nominálna hodnota obligácie
c	ročná kupónová sadzba
$C = cM$	ročná kupónová platba
m	frekvencia kupónových platieb (za rok)
n	doba do splatnosti
P_0	tržná cena obligácie
i	hodnotiaca úroková miera

Spravodlivú cenu obligácie vypočítame ako diskontovanú hodnotu finančného toku spojeného s danou obligáciou ako (viď [9])

$$P_0 = \frac{C}{1+i} + ... + \frac{C+M}{(1+i)^n} = \sum_{t=1}^{n} \frac{C}{(1+i)^t} + \frac{M}{(1+i)^n} = M\left[\frac{c}{i} - \frac{c-i}{i(1+i)^n}\right]. \quad (2.1)$$

V prípade, že kupónová platba je vyplácaná m-krát ročne platí vzťah

$$P_0 = \sum_{t=1}^{nm} \frac{C/m}{(1+i_{ef})^{t/m}} + \frac{M}{(1+i_{ef})^n}. \quad (2.2)$$

Spravodlivá (čistá) cena obligácie k dátumu niektorej z kupónových platieb (bez zahrnutia kupónovej platby v čase k) (viď [9])

$$P_k = \sum_{t=1}^{n-k} \frac{C}{(1+i)^t} + \frac{M}{(1+i)^{n-k}}, \quad k = 1, ..., n. \tag{2.3}$$

Takisto môžeme uvažovať kupónové platby m-krát do roka a dostaneme

$$P_k = \sum_{t=1}^{(n-k)m} \frac{C/m}{(1+i_{ef})^{t/m}} + \frac{M}{(1+i_{ef})^{n-k}}, \quad k = 1, ..., n. \tag{2.4}$$

Nakoniec cena obligácie k dátumu medzi dvoma kupónovými platbami (hrubá cena), kde do uplynutia doby splatnosti ostáva $n* = \lfloor n* \rfloor + \{n*\}$ rokov (necelý počet období) a platí $\{n*\} \in (0,1)$ (viď [9]).

$$P_{n-n*} = \frac{P_{n-\lfloor n* \rfloor}}{(1+i)^{\{n*\}}} = \left(\sum_{t=0}^{\lfloor n* \rfloor} \frac{C}{(1+i)^t} + \frac{M}{(1+i)^{\lfloor n* \rfloor}} \right) \frac{1}{(1+i)^{\{n*\}}} \tag{2.5}$$

Aj teraz môžeme uvažovať kupónové platby m-krát do roka a dostaneme

$$P_{n-n*} = \left(\sum_{t=0}^{\lfloor n* \rfloor m} \frac{C/m}{(1+i_{ef})^{t/m}} + \frac{M}{(1+i_{ef})^{\lfloor n* \rfloor}} \right) \frac{1}{(1+i_{ef})^{\{n*\}}}. \tag{2.6}$$

Implementácia v Mathematice

FinancialBond[Parametre, OkolitéParametre]

nám na výstupe dáva hodnotu obligácie, kde

možné parametre sú

"$FaceValue$"	nominálna hodnota obligácie
"$Coupon$"	ročná kupónová sadzba alebo funkcia platieb
"$Maturity$"	doba do splatnosti
"$CouponInterval$"	interval kupónových platieb
"$RedemptionValue$"	hodnota odkúpenia obligácie,

možné okolité parametre sú

"$InterestRate$"	očakávaný výnos
"$Settlement$"	hodnotiaci okamžik
"$DayCountBasis$"	kalendárova konvencia, kde

možné kalendárové konvencie sú

"30/360"	báza U.S. dlhopisov
"30E/360"	nemecká metóda
"*Actual*/365"	anglická metóda
"*Actual*/360"	francúzska metóda
Automatic	presné kalendárne výpočty.

$$\textbf{FinancialBond}[\{\text{“}\textbf{FaceValue}\text{”} \to \mathbf{M}, \text{“}\textbf{Coupon}\text{”} \to \mathbf{c}, \text{“}\textbf{Maturity}\text{”} \to \mathbf{n}\},$$
$$\{\text{“}\textbf{InterestRate}\text{”} \to \mathbf{i}, \text{“}\textbf{Settlement}\text{”} \to \mathbf{0}\}]$$

(predajná cena n-ročnej kupónovej obligácie (kupón raz za rok) s nominálnou hodnotou M a výnosom i) na výstupe (podľa vzorca (2.1)) dá

$$\frac{cM\left((i+1)^n - 1\right)(i+1)^{-n}}{i} + M(i+1)^{-n} = M\left[\frac{c}{i} - \frac{c-i}{i(1+i)^n}\right].$$

Prostredníctvom príkazu **FinancialBond**[**Parametre**, **Okolité parametre**, **Vlastnosti**] sme schopní vyjadriť rôzne vlastnosti danej obligácie. Za pomoci príkazu **FinancialBond**[**Parametre**, **Okolité parametre**, “**Rules**”] je možné vypočítať všetky dostupné vlastnosti, kde

možné vlastnosti sú

“*Value*”	cena upravená o vzniknuté úroky
“*FullValue*”	neupravená cena
“*AccruedInterest*”	vzniknuté úroky v čase vysporiadania
“*Duration*”	Macaulayho durácia
“*ModifiedDuration*”	modifikovaná durácia
“*Convexity*”	konvexita
“*CouponToSettlementDays*”	počet dní od posledného kupónu po dátum vysporiadania
“*SettlementToCouponDays*”	počet dní od vysporiadania po najbližší kupón
“*NextCouponDate*”	dátum nasledujúceho kupónu
“*PreviousCouponDate*”	dátum predchádzajúceho kupónu
“*RemainingCoupons*”	ostávajúce kupónové platby
“*AccruedFactor*”	časť kupónových platieb reprezentujúca naakumulované úroky.

Aplikácia 2.1. Nominálna hodnota kupónového dlhopisu je 18 000 Kč s polročnými kupónovými platbami a kupónovou sadzbou 7 %. Doba splatnosti je 6 rokov, ročný výnos do splatnosti 9, 5 %. Aká je spravodlivá cena v čase emisie?

Riešenie: Najprv dopočítame efektívnu úrokovú mieru a dosadíme dané parametre do vzorca (2.2). Potom vypočítame spravodlivú cenu dlhopisu pomocou fukcie FinancialBond.

$$\textbf{FinancialBond}[\{\text{“}\textbf{FaceValue}\text{”} \to \mathbf{18\,000}, \text{“}\textbf{Coupon}\text{”} \to \mathbf{.07}, \text{“}\textbf{Maturity}\text{”} \to \mathbf{6},$$
$$\text{“}\textbf{CouponInterval}\text{”} \to \mathbf{1/2}\}, \{\text{“}\textbf{InterestRate}\text{”} \to \mathbf{.095}, \text{“}\textbf{Settlement}\text{”} \to \mathbf{0}\}]$$

Záver: V oboch prípadoch dostaneme rovnaký výstup a to konkrétne 15 977, 3 Kč.

Aplikácia 2.2. Nominálna hodnota kupónového dlhopisu je 8 000 Kč, kupón je vyplácaný 2-krát do roka, hodnota k dátumu emisie je 7 800 Kč, doba splatnosti je 5 rokov a ročný výnos do splatnosti je 9%. Aká je ročná kupónová sadzba dlhopisu s takýmito parametrami?

Riešenie: Použijeme vyššie popísanú funkciu FinancialBond, do ktorej dosadíme všetky známe parametre a neznámy parameter c vyjadríme prostredníctvom funkcie Solve.

$$\mathbf{Solve[FinancialBond[\{\text{``FaceValue''} \to 8000, \text{``Coupon''} \to c,}$$

$$\mathbf{\text{``Maturity''} \to 5, \text{``CouponInterval''} \to \frac{1}{2}\}, \{\text{``InterestRate''} \to .09,}$$

$$\mathbf{\text{``Settlement''} \to 0\}] == 7800, c] \Longrightarrow \{c \to 0.0837\}}$$

Záver: Ročná kupónová sadzba je 8,37%.

Aplikácia 2.3. Aká je čistá a hrubá cena kupónovej obligácie s nominálnou hodnotou 10 000 Kč ku dňu 13.12.2007, ktorá bola emitovaná 13.10.2006 s dobou splatnosti 6 rokov? Kupónové platby vyplácané stvrťročne, kupónová sadzba 10 %, úroková miera 8, 5 %.

Riešenie: Najprv vyjadríme čistú cenu cez

$$\mathbf{FinancialBond[\{\text{``FaceValue''} \to 10\,000, \text{``Coupon''} \to .1, \text{``Maturity''} \to}$$

$$\mathbf{\{2012, 10, 13\}, \text{``CouponInterval''} \to 1/4\}\{\text{``InterestRate''} \to .085,}$$

$$\mathbf{\text{``Settlement''} \to \{2007, 12, 13\}\}, \text{``Value''}] \Longrightarrow 10\,589.}$$

Podobným spôsobom vypočítame hrubú cenu príkazom

$$\mathbf{FinancialBond[\{\text{``FaceValue''} \to 10\,000, \text{``Coupon''} \to .1, \text{``Maturity''} \to}$$

$$\mathbf{\{2012, 10, 13\}, \text{``CouponInterval''} \to 1/4\}\{\text{``InterestRate''} \to .085,}$$

$$\mathbf{\text{``Settlement''} \to \{2007, 12, 13\}\}, \text{``FullValue''}] \Longrightarrow 10\,755.}$$

Záver: Správnosť týchto výsledkov je možno overiť vzorcami (2.2) a (2.6).

Poznámka: V úlohách ako je táto, kde počítame hodnotu obligácie cez necelé obdobia je možné používať rôzne kalendárové konvencie (pridaním napr. "**DayCountBasis**" $\to$ **30/360** do okolitých parametrov), ktoré sa volia podľa typu trhu.

Aplikácia 2.4. Máme obligáciu s nominálnou hodnotou 20 000 Kč, ktorá vypláca kupónové platby raz do roka vo výške 6% nominálnej hodnoty, doba splatnosti je 5 rokov a výnos do splatnosti je 8%. Vypočítajte približnú tržnú cenu obligácie

- pri zvýšení úrokovej sadzby o 1%
- pri znížení úrokovej sadzby o 1 %.

Riešenie: Najskôr vypočítame súčasnú hodnotu obligácie (PV)

$$\mathbf{FinancialBond[\{\text{``FaceValue''} \to 20\,000, \text{``Coupon''} \to .06, \text{``Maturity''} \to 5\},}$$

$$\mathbf{\{\text{``InterestRate''} \to .08, \text{``Settlement''} \to 0\}] \Longrightarrow 18\,402.9.}$$

Potom vypočítame modifikovanú duráciu (D_{mod}) a konvexitu (C).

$$\textbf{FinancialBond}[\{\text{“}\textbf{FaceValue}\text{”} \to \textbf{20 000}, \text{“}\textbf{Coupon}\text{”} \to \textbf{.06}, \text{“}\textbf{Maturity}\text{”} \to \textbf{5}\},$$

$$\{\text{“}\textbf{InterestRate}\text{”} \to \textbf{.08}, \text{“}\textbf{Settlement}\text{”} \to \textbf{0}\}, \{\text{“}\textbf{ModifiedDuration}\text{”}\}]$$

$$\Longrightarrow \textbf{4.11048}$$

$$\textbf{FinancialBond}[\{\text{“}\textbf{FaceValue}\text{”} \to \textbf{20 000}, \text{“}\textbf{Coupon}\text{”} \to \textbf{.06}, \text{“}\textbf{Maturity}\text{”} \to \textbf{5}\},$$

$$\{\text{“}\textbf{InterestRate}\text{”} \to \textbf{.08}, \text{“}\textbf{Settlement}\text{”} \to \textbf{0}\}, \{\text{“}\textbf{Convexity}\text{”}\}] \Longrightarrow \textbf{21.9108}$$

Dopočítame modifikovanú konvexitu

$$C_{mod}(CF, i) = \frac{C(CF, i)}{(1+i)^2} = \frac{21.9108}{1.08^2} = 18.7849.$$

Teraz môžeme vyjadriť zmenu ceny ako

$$\Delta PV = -D_{mod}(CF, i) * PV * \Delta i + \frac{1}{2} * C_{mod}(CF, i) * PV * (\Delta i)^2 =$$

- $-4.11 * 18\,402.92 * (0.01) + \frac{1}{2} * 18.79 * 18\,402.92 * (0.01)^2 = -739.164 \Longrightarrow$ nová $PV = 17\,663.8$
- $-4.11 * 18\,402.92 * (-0.01) + \frac{1}{2} * 18.79 * 18\,402.92 * (-0.01)^2 = 773.734 \Longrightarrow$ nová $PV = 19\,176.6$

Záver: Približná nová tržná cena obligácie je $17\,663,8$ Kč pri zvýšení úrokovej sadzby o 1% a $19\,176,6$ Kč pri znížení o 1%.

2.2 Finančné deriváty

Definícia 2.2. *Finančné deriváty* sú inštrumenty, ktorých hodnota je odvodená od určitého podkladového aktíva. Podkladovým aktívom môžu byť rôzne akcie, obligácie, meny, úrokové miery, burzové indexy, komodity a podobne. Výraz finančný derivát popisuje finančné produkty alebo operácie, ktoré umožňujú v tomto okamihu zafixovať, resp. dohodnúť kurz alebo cenu, za ktorú môže byť aktívum, ktoré sa k tomuto kontraktu vzťahuje, kúpené, respektíve predané k určitému budúcemu dátumu. Finančný derivát je v podstate kontingentný, tj. podmienený, nárok odvodený z predmetného aktíva, ktoré tento derivát podkladá. Uplatnenie tohoto nároku znamená, že aktívum, ktoré sa k špecifickému derivátu viaže, bude prevzaté kupujúcim a dodané predávajúcim daného finančného derivátu. Existujú tri základné deriváty, a to termínové obchody (forwardy alebo futures), swapové kontrakty a opcie:

- **Termínové operácie**
  Jedná sa o kontrakt, na predaj či kúpu určitého aktíva v budúcom časovom termíne za dnes stanovenú cenu. Termínový kontrakt na kúpu predstavuje záväzok prevziať vopred stanovené množstvo podkladového aktíva v dohodnutom budúcom termíne. Termínový kontrakt na predaj predstavuje záväzok dané podkladové aktivum dodať. Patria sem Forwardy a Futures.

- **Swapy**
  Swap je dohoda 2 subjektov o zámene série platieb uskutočňovaných pravidelne v priebehu dohodnutého obdobia. Rozlišujeme hlavne menový swap, úrokový swap a equitný swap.

- **Opcie**
  Od termínových obchodov sa líšia predovšetkým tým, že kupujúci opčného kontraktu (v dlhej pozícií) má právo, a nie povinnosť svoju opciu k určitému budúcemu dátumu realizovať alebo uplatniť. Predávajúci opčného kontraktu (výstavca v krátkej pozícií) inkasuje od kupujúceho poplatok za opciu nazývaný *opčná prémia*.

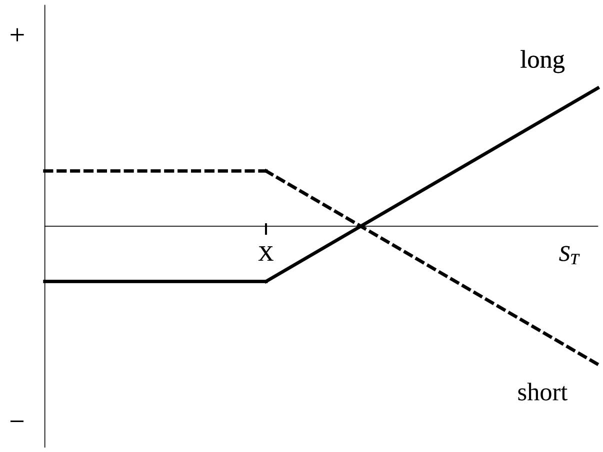
Ďalej sa budeme zaoberať už len s opčnými derivátmi a budeme používať nasledujúce značenie:

S_t	promptná, bežná cena podkladového aktiva v čase t
X	uplatňovacia, realizačná cena
T	čas expirácie opcie

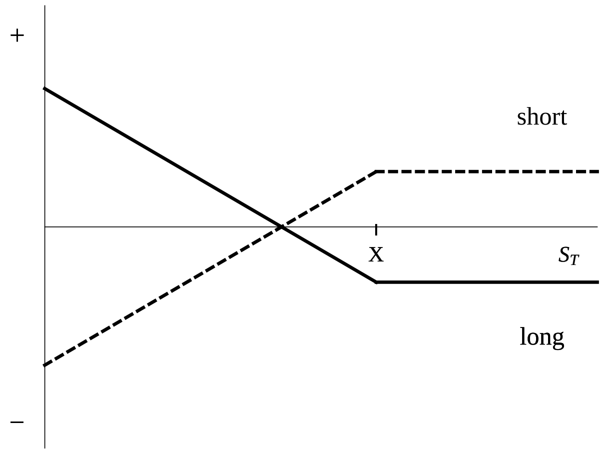
Opcie je možné rozlišovať z rôznych hľadísk. Najznámejšie rozlíšenie je na európske a americké, resp. na put a call opcie.

Pre *call opciu* platí, že kupujúci tohoto opčného kontraktu môže ale nemusí požadovať od predávajúceho tohoto opčného kontraktu dodanie podkladového aktíva za vopred stanovenú cenu. Kupujúci call opcie (v dlhej pozícií) sa vystavuje najvyššej možnej strate veľkosti opčnej prémie, ktorú musel zaplatiť. Naopak pokiaľ spotová cena podkladového aktíva rastie, dosahuje zisk, ktorý nieje zhora obmedzený. Predávajúci call opcie dosahuje maximálny zisk veľkosti obdržanej opčnej prémie. Predávajúci teda spolieha na to, že spotová cena sa bude v dobe expirácie opcie pohybovať na nižšej úrovni, ako je realizačná cena opcie. V opačnom prípade mu hrozí zhora neobmedzená strata.

Pre *put opciu* platí, že kupujúci tohoto opčného kontraktu môže ale nemusí požadovať od predávajúceho tohoto opčného kontraktu aby predávajúci odkúpil od kupujúceho podkladové aktívum za vopred stanovenú cenu. Najvyššia strata kupujúceho nepresahuje hodnotu opčnej prémie, ktorú musel zaplatiť. Naopak pokiaľ spotová cena podkladového aktíva klesá, dosahuje zisk, ktorý môže nadobudnúť výšku realizačnej ceny od ktorej je odpočítaná opčná prémia. Predajca put opcie dosahuje maximálny zisk veľkosti opčnej prémie, ktorú obdržal, v prípade že spotová cena podkladového aktíva rastie. Pri poklese spotovej ceny dosahuje stratu maximálne vo výške realizačnej ceny bez opčnej prémie.



Obr. 2.1: Dlhá a krátka pozícia v európskej call opcii



Obr. 2.2: Dlhá a krátka pozícia v európskej put opcii

2.2.1 Oceňovanie opcií Black-Scholesovou metódou

V tejto podkapitole sa budeme zaoberať oceňovaním európskych opcií. *Black-Scholesov* model predpokladá existenciu dokonalého trhu, bez možnosti arbitráže, bez transakčných nákladov a daní a všetky akcie na trhu sú neobmedzene deliteľné. Faktory, ktoré majú vplyv na určenie optimálnej hodnoty či už put alebo call opcie sú

- stochastickosť pohybu ceny aktív, s ňou súvisiaca veľkosť volatility σ a dĺžka času do expirácie $\tau = (T - t)$,
- aktuálna tržná cena aktíva S_t (predpokladáme, že sa riadi geometrickým Brownovým pohybom čo je modifikácia Wienerovho procesu, viac v [4]) a dohodnutá expiračná cena X,
- bezrizikové úročenie prémie dané veľkosťou spojitého bezrizikového úroku r.

Pre potreby ďalšieho výkladu zavádzame nasledujúce všeobecne používané značenie:

c, p	teoreticky správne ceny európskych call a put opcií
C, P	teoreticky správne ceny amerických call a put opcií
$\tau = (T - t)$	časový interval zostávajúci do splatnosti opcie
σ	volatilita, rizikovosť, nestálosť ceny podkladového aktiva
r	bezriziková úroková miera p.a.
d	konštantná ročná miera dividendového výnosu

Očakávaná stredná hodnota európskej call opcie vo svete neutrálneho rizika je vyššie číslo z nasledujúcich dvoch: $(S_T - X)$ alebo 0, tj. $E[\max(S_T - X), 0]$. Teraz odvodíme teoreticky správnu cenu európskej opcie call (c). Pokiaľ je v dobe splatnosti (T) opcie call očakávaná stredná hodnota tejto opcie $E[\max(S_T - X), 0]$, potom v súčasnej dobe (t) by mala byť súčasná hodnota tohoto výrazu menšia. Očakávanú strednú hodnotu call opcie je treba diskontovať bezrizikovou spojitou úrokovou sadzbou r per annum. Pri zostávajúcom časovom intervale $T - t$ do splatnosti opcie, dostaneme

$$c = e^{-r(T-t)} E[\max(S_T - X), 0]. \tag{2.7}$$

Substitúciou a integrovaním dostaneme teoreticky správnu *cenu európskej call opcie* podľa Blacka a Scholesa (v čase t). Toto odvodenie je pomerne zložité a vedie ku konštrukcií a riešeniu diferenciálnej rovnice. Podrobné odvodenie a dôkazy nájdeme napr. v zdroji [4].

$$c_t = S_t \Phi(d_1) - X e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \tag{2.8}$$

kde

$$d_1 = \frac{\log(S_t/X) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \tag{2.9}$$

$$d_2 = \frac{\log(S_t/X) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \tag{2.10}$$

$\Phi(d_1)$ a $\Phi(d_2)$ sú hodnoty kumulatívneho pravdepodobnostného rozdelenia normovanej normálnej premennej ($\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\, d\xi$ je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia $\mathrm{N}(0, 1)$) a log označuje prirodzený logaritmus.

Teoreticky správna *hodnota európskej put opcie* sa odvodí obdobným spôsobom ako pri call opciách.

$$p_t = X e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) - S_t \Phi(-d_1) = X e^{-r(T-t)} [1 - \Phi(d_2)] - S_t [1 - \Phi(d_1)] \tag{2.11}$$

U opcií je možné, že sú vystavené na akcie, ktoré vyplácajú *dividendu*. Nárok na dividendu pritom nemá majiteľ opcie ale kupujúci. Máme európsku call opciu na akciu, ktorá nesie dividendu. Potom jej cena bude nižšia ako cena rovnakej opcie bez dividendy. U európskej put opcie platí tento vzťah naopak, a teda cena európskej opcie na akciu s dividendou bude vyššia než cena rovnakej opcie bez dividendy. Pri vystavení európskej call opcie na akciu vyplácajúcu dividendy máme

$$c_t = S_t e^{-d(T-t)} \Phi(d_1) - X e^{-r(T-t)} \Phi(d_2). \tag{2.12}$$

Pri vystavení európskej put opcie na akciu vyplácajúcu *dividendy* máme

$$p_t = Xe^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S_t e^{-d(T-t)}\Phi(-d_1). \tag{2.13}$$

Implementácia v Mathematice

Mathematica je schopná prostredníctvom funkcie **FinancialDerivative** počítať aktuálne hodnoty a parciálne derivácie u množstva typov kontraktov finančných derivátov. Zoznam dostupných kontraktov finančných derivátov dostaneme prostredníctvom príkazu **FinancialDerivative**[]. Základná štruktúra danej funkcie je nasledovná

FinancialDerivative[**inštrument**, **parametre**,

okolité parametre, **vlastnosti**].

Zoznam možných parametrov a okolitých parametrov získame prostredníctvom príkazu

FinancialDerivative[**inštrument**].

Pre aktuálnu hodnotu (v čase t) opcie (napr. európskej call na akciu vyplácajúcu dividendy) použijeme predpis

FinancialDerivative[{"**European**", "**Call**"}, {"**StrikePrice**" $\rightarrow$ **X**,

"**Expiration**" $\rightarrow \tau$} {"**InterestRate**" $\rightarrow$ **r**, "**Volatility**" $\rightarrow \sigma$,

"**CurrentPrice**" $\rightarrow \mathbf{S_t}$, "**Dividend**" $\rightarrow$ **d**}]

Podobným spôsobom je možno vyjadriť teoreticky správnu hodnotu všetkých dostupných inštrumentov. Expiračný čas môže byť zadaný ako zostávajúci čas do splatnosti alebo vo forme dátumu, pričom ak nie je určený čas expirácie berie sa aktuálny deň.

Aplikácia 2.5. Nájdite hodnotu európskej call opcie na akciu spoločnosti DEC, ak

- expiračná cena $X = 60$ Kč,
- momentálna tržná cena $S_t = 58,5$ Kč,
- čas do expirácie $\tau = T - t = 0,3$ roka,
- volatilita akcie $\sigma = 0,29$ (29%),
- bezriziková úroková miera $r = 0,04$ (4%).

Riešenie: Najprv vypočítame požadovanú hodnotu za pomoci Black-Scholesovej metódy na oceňovanie opcií.

$$d_1 = \frac{\log(58.5/60) + \left(0.04 + \frac{1}{2}0.29^2\right)0.3}{0.29\sqrt{0.3}} = -0.00442464$$

$$d_2 = \frac{\log(58.5/60) + \left(0.04 - \frac{1}{2}0.29^2\right)0.3}{0.29\sqrt{0.3}} = -0.163264,$$

z toho

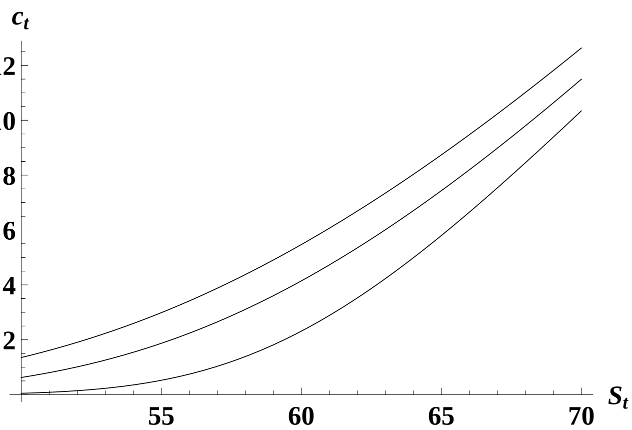
$$c_t = 58.5\,\mathrm{CDF}[\mathrm{NormalDistribution}[0,1], d_1]-$$
$$60e^{-0.04*0.3}\,\mathrm{CDF}[\mathrm{NormalDistribution}[0,1], d_2] = 3.34886$$

Teraz vypočítame požadovanú hodnotu s funkciou **FinancialDerivative**.

$$\textbf{FinancialDerivative}[\{\text{“}\textbf{European}\text{”}, \text{“}\textbf{Call}\text{”}\}, \{\text{“}\textbf{StrikePrice}\text{”} \to \mathbf{60},$$
$$\text{“}\textbf{Expiration}\text{”} \to \mathbf{0.3}\}, \{\text{“}\textbf{InterestRate}\text{”} \to \mathbf{0.04}, \text{“}\textbf{Volatility}\text{”} \to \mathbf{0.29},$$
$$\text{”}\textbf{CurrentPrice}\text{”} \to \mathbf{58.5}\}] \Longrightarrow \mathbf{3.34886}$$

Záver: V oboch postupoch nám vyšlo, že hodnota európskej call opcie je $3,34886$ Kč.

Na nasledujúcich grafoch ukážeme závislosť ceny opcie na hlavných faktoroch, ktoré ju ovplyvňujú. Použijeme dáta z predchádzajúcej úlohy, kde zvolíme pohyblivú aktuálnu cenu pre 3 rôzne zostávajúce doby do splatnosti. Na grafoch je zreteľne vidieť, že ak akcia na trhu zdražie, musí narásť aj cena call opcie a naopak, ak cena akcie klesne, musí poklesnúť aj cena call opcie. U put opcií je to presne naopak. Na hodnotu opcie má okrem iného vplyv aj zostávajúca doba do splatnosti. Čím je táto doba kratšia, tým je menšia pravdepodobnosť výraznejšej zmeny ceny akcie. U našej európskej call opcii platí, že s klesajúcou dobou do expirácie klesá i cena opcie, v našom prípade volíme $\tau = 0.5, 0.3, 0.2$.



Obr. 2.3: Vývoj cien call opcie pri pohyblivej spotovej cene a rôznych časoch do splatnosti

2.2.2 Oceňovanie amerických opcií

Základný rozdiel medzi európskou a americkou opciou je, že európska opcia môže byť uplatnená iba v čase expirácie a americká opcia môže byť uplatnená v ľubovolnom čase do expirácie derivátu. Americká opcia môže byť teda uplatnená kedykoľvek pred expiráciou. Na základe tejto vlastnosti vieme, že ak by sme mali dve rovnaké opcie, kde jedna by bola európska a druhá americká, bude cena európskej opcie nižšia alebo rovnaká ako cena opcie americkej. Pri problematike oceňovania amerických opcií sme čerpali zo zdrojov [2],[4] a [7].

Pre americké opcie na akciu bez dividendy, z vlastností opcií, platí

$$C_t \geq c_t \geq S_t - Xe^{-r(T-t)} > S_t - X. \tag{2.14}$$

Hodnota americkej call opcie na akciu bez dividendy je teda vždy väčšia ako jej vnútorná hodnota. Pre majiteľa opcie to znamená, že je pre neho výhodnejšie túto opciu predať ako realizovať, a teda opcia nebude nikdy uplatnená pred časom expirácie. Na základe tejto vlastnosti sme schopní *americkú call opciu na akciu bez dividendy* oceniť pomocou Black-Scholesovej metódy a platí nasledujúci vzťah

$$C_t = S_t\Phi(d_1) - Xe^{-r(T-t)}\Phi(d_2). \tag{2.15}$$

Majme teraz americkú call opciu na akciu nesúcu dividendu. Ak bude hodnota vyplatenej dividendy D (daná mierou dividendového výnosu d) dostatočne malá, potom bude na základe vlastností opcií platiť

$$S_t - Ke^{-r(T-t)} - D > S_t - K. \tag{2.16}$$

Ani v tomto prípade nebude call opcia uplatnená keďže jej hodnota bude stále väčšia ako realizačná hodnota. Opciu tohoto typu teda oceníme rovnako ako európsku call opciu na akciu s dividendou. Zvyšné americké call opcie vyplácajúce dividendu Black-Scholesovou metódou už ale neoceníme. Na ich ocenenie môžeme použiť binomický model alebo špeciálne výpočtové postupy, ktoré sa snažia danú hodnotu numericky odhadnúť (napr. Fisher Black, viac v [4]).

Oceňovanie pomocou *binomického stromu* je veľmi užitočná technika, ktorú predstavuje graf reprezentujúci rôzne možné cesty, po ktorých by sa mohla vyvíjať cena akcie počas života opcie. Hlavnou výhodou tejto techniky je presnosť a dá sa dokázať, že za istých predpokladov (vhodne zvolené u a d, $n \to \infty$) konverguje k Black-Scholesovemu modelu. Predpoklady binomického modelu sú rovnaké ako pri Black-Scholesovom modele. Základný princíp spočíva vtom, že vývoj ceny akcie je vlastne náhodná prechádzka, kde v každom kroku existuje určitá pravdepodobnosť nárastu ceny akcie a určitá pravdepodobnosť poklesu ceny akcie (s pravdepodobnosťou p sa cena akcie S_t v nasledujúcom časovom okamžiku zmení na hodnotu uS_t a s pravdepodobnosťou $1-p$ na dS_t). Platia teda nasledujúce vzťahy

$$P(S_{t+\triangle t} = uS_t \mid S_t) = p, \;\; P(S_{t+\triangle t} = dS_t \mid S_t) = 1-p, \tag{2.17}$$

v ktorých predpokladáme, že $d < 1 < u$ a teda cena akcie buď vzrastie o $u - 1$ s pravdepodobnosťou p, alebo klesne o $1-d$ s pravdepodobnosťou $1-p$. Očakávaná hodnota ceny akcie v bezrizikovom prostredí je

$$E(S_{t+\triangle t}|S_t) = pu\, S_t + (1-p)dS_t, \tag{2.18}$$

pre ktorú platí, že výška výnosnosti akcie je rovnaká ako výnosnosť bezrizikového kapitálu

$$pu\, S_t + (1-p)dS_t = e^{r\triangle t}S_t, \tag{2.19}$$

kde $e^{r\triangle t}$ je výnosnosť kapitálu za obdobie $\triangle t$. Z rovnice (2.19) vyjadríme

$$p = \frac{e^{r\triangle t} - d}{u-d} \tag{2.20}$$

Rozptyl ceny akcie bude potom

$$var(S_{t+\triangle t}|S_t) = pu^2S_t^2 + (1-p)d^2S_t^2 - (pu + (1-p)d)^2S_t^2. \tag{2.21}$$

Rozptyl ceny akcie s volatilitou σ je za malý časový okamžik $\triangle t$ $\sigma^2\triangle t$ (viď [4]). Teraz porovnáme volatilitu akcie ($\sigma^2\triangle tS_t^2$) s parametrami binomického modelu. Tento vzťah upravíme, dosadíme p z (2.20) a dostávame

$$e^{r\triangle t}(u+d) - ud - e^{2r\triangle t} = \sigma^2\triangle t. \tag{2.22}$$

Pridáme podmienku $u = \frac{1}{d}$ (Cox, Ross a Rubinstein), zanedbáme mocniny $\triangle t$ vyššie ako 1 a rovnice (2.19) a (2.22) majú riešenie, ktoré je možno aproximovať rovnicami $u = e^{\sigma\sqrt{\triangle t}}$, $d = e^{-\sigma\sqrt{\triangle t}}$. Pre tieto parametre dáva binomický model rovnaké výstupy ako Black-Scholesov model.

Binomický model je v podstate jediný možný nástroj pre ocenenie americkej opcie (call aj put) s dividendou, aj bez nej. Ich oceňovanie je postavené na rozdelení doby života opcie do malých časových úsekov, v ktorých sledujeme vývoj kurzov a ceny opcie. V každom období overujeme, či nie je vhodná doba pre uplatnenie opcie.

Uvažujme americkú opciu s dobou do expirácie T, n krokovým vývojom o dĺžke jedného kroku $\triangle t = \frac{T}{n}$. Označme (i,j) j-ty uzol v čase $i\triangle t$, $i = 1, ..., n$, $j = 0, ..., i$. $V_{i,j}$ označuje hodnotu opcie v uzle (i,j). Cena akcie je v uzle (i,j) $S_0u^jd^{i-j}$. Cena americkej put opcie v čase expirácie je

$$V_{n,j} = \max(K - S_0u^jd^{n-j}, 0), \;\; j = 0, ..., n. \tag{2.23}$$

Máme opciu v čase $i\triangle t$, v uzle (i,j). V čase $(i+1)\triangle t$ bude opcia s pravdepodobnosťou p v uzle $(i+1, j+1)$ a s pravdepodobnosťou $1-p$ bude v uzle $(i+1,j)$. Potom, hodnota opcie v uzle (i,j), ak sa neberie do úvahy skoršie uplatnenie bude

$$V_{i,j} = e^{-r\triangle t}(pV_{i+1,j+1} + (1-p)V_{i+1,j}), \tag{2.24}$$

pre $i = 0, ..., n-1, \;\; j = 0, ..., i$. Ak sa skoršie uplatnenie do úvahy berie, hodnota opcie bude

$$V_{i,j} = e^{-r\triangle t}\max(K - S_0u^jd^{i-j}, e^{-r\triangle t}(pV_{i+1,j+1} + (1-p)V_{i+1,j})), \tag{2.25}$$

pre $i = 0, ..., n-1, \;\; j = 0, ..., i$. Pri oceňovaní začíname na úrovni n a ideme vzad až do požadovanej hodnoty $V_{0,0}$. Pri oceňovaní amerických opcií na akcie vyplácajúce dividendy daná hodnota klesne pri výplate dividend. Tento spôsob ocenenia sme čerpali z [2].

Implementácia v Mathematice

Oceňovanie amerických opcií je teda zložitejšie a odlišuje sa od prípadu k prípadu. V tomto je Mathematica silný nástroj a celý tento proces uľahčuje. Keď chceme oceniť americkú opciu upravíme parametre funkcie **FinancialDerivative**, ktoré budú vyzerať nasledovne

$$\{\text{“}American\text{”}, \text{“}Call\text{”}\} \text{ alebo } \{\text{“}American\text{”}, \text{“}Put\text{”}\}.$$

Cena americkej opcie sa v Mathematice určuje ako numerické riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice. Vo funkcií FinancialDerivative môžeme ale stanoviť metódu, prostredníctvom ktorej budeme hodnotu tejto americkej opcie vyčíslovať. Vyberieme metódu binomického stromu ($Method \rightarrow$ "*Binomial*"), pre ktorú sme si ukázali že aproximuje k Black-Scholesovemu modelu.

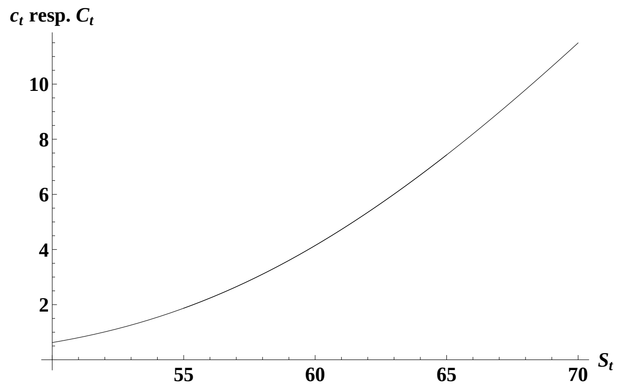
Aplikácia 2.6.
Uvažujme napríklad americkú call opciu s realizačnou cenou 60 Kč, momentálnou tržnou cenou 61 Kč, dobou do expirácie 0,3 roka, úrokovou mierou 5 % a volatilitou akcie 29 %.

Riešenie: Jej hodnotu určíme za pomoci binomického modelu cez príkaz

$$\textbf{FinancialDerivative}[\{\text{“}\textbf{American}\text{”}, \text{“}\textbf{Call}\text{”}\}, \{\text{“}\textbf{StrikePrice}\text{”} \rightarrow \mathbf{60},$$
$$\text{“}\textbf{Expiration}\text{”} \rightarrow \mathbf{0.3}\}, \{\text{“}\textbf{InterestRate}\text{”} \rightarrow \mathbf{0.05}, \text{“}\textbf{Volatility}\text{”} \rightarrow \mathbf{0.29},$$
$$\text{“}\textbf{CurrentPrice}\text{”} \rightarrow \mathbf{61}\}, \textbf{Method} \rightarrow \text{“}\textbf{Binomial}\text{”}] \Longrightarrow \mathbf{4.82258}\ \text{Kč}.$$

Na základe nasledujúceho príkazu a grafu na obrázku 2.4 máme možnosť vidieť, že hodnota americkej opcie z binomického modelu skutočne aproximuje k Black-Scholesovej metóde, keďže sa hodnoty európskej a americkej opcie rovnajú.

$$\textbf{FinancialDerivative}[\{\text{“}\textbf{European}\text{”}, \text{“}\textbf{Call}\text{”}\}, \{\text{“}\textbf{StrikePrice}\text{”} \rightarrow \mathbf{60},$$
$$\text{“}\textbf{Expiration}\text{”} \rightarrow \mathbf{0.3}\}, \{\text{“}\textbf{InterestRate}\text{”} \rightarrow \mathbf{0.05}, \text{“}\textbf{Volatility}\text{”} \rightarrow \mathbf{0.29},$$
$$\text{“}\textbf{CurrentPrice}\text{”} \rightarrow \mathbf{61}\}] \Longrightarrow \mathbf{4.82258}\ \text{Kč}.$$



Obr. 2.4: Porovnanie hodnôt americkej (binomický model) a európskej opcie (Black-Scholes)

Nakoniec si hodnotu americkej opcie vyjadríme ako numerické riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice

$$\textbf{FinancialDerivative}[\{\text{“}\textbf{American}\text{”}, \text{“}\textbf{Call}\text{”}\}, \{\text{“}\textbf{StrikePrice}\text{”} \rightarrow \mathbf{60},$$
$$\text{“}\textbf{Expiration}\text{”} \rightarrow \mathbf{0.3}\}, \{\text{“}\textbf{InterestRate}\text{”} \rightarrow \mathbf{0.05}, \text{“}\textbf{Volatility}\text{”} \rightarrow \mathbf{0.29},$$
$$\text{“}\textbf{CurrentPrice}\text{”} \rightarrow \mathbf{61}\}, \text{“}\textbf{GridSize}\text{”} \rightarrow \{\mathbf{25\,000}, \mathbf{500}\}] \Longrightarrow \mathbf{4.82258}\ \text{Kč},$$

kde GridSize špecifikuje presnosť tejto aproximácie.

2.2.3 Volatilita

V predchádzajúcich podkapitolách sme si uviedli parametre, ktoré vstupujú do Black-Scholesovho modelu. Najproblémovejším ukazovateľom je volatilita, ktorej merateľnosť je najobtiažnejšia. Pri odhade volatility môžeme použiť buď historickú volatilitu, alebo implikovanú volatilitu.

Historickú volatilitu získame odhadom pomocou historických kurzov akcie. Implikovanú volatilitu vypočítame z Black-Scholesoveho vzorca, kde vieme, že daná opcia je obchodovateľná na trhu a poznáme jej hodnotu.

Implementácia v Mathematice

Softvér Mathematica má v sebe zabudovanú užitočnú funkciu **FinancialData**, ktorú si bližšie rozoberieme v tretej kapitole. Prostredníctvom tejto funkcie sme schopní vyjadriť historickú volatilitu všetkých obchodovaných akcií, a to za posledných 20 alebo 50 dní. Napríklad volatilitu akcií spoločnosti Microsoft za posledných 50 dní by sme získali za pomoci príkazu

FinancialData[“**MSFT**”, “**Volatility50Day**”],

podobným spôsobom by sme mohlo vyjadriť volatilitu za posledných 20 dní.

Aplikácia 2.7.

Výpočet implikovanej volatility môžeme ukázať na príklade z predchádzajúcej podkapitoly (aplikácia (2.5)). Keď naopak poznáme tržnú hodnotu opcie a chceme vyjadriť implikovanú volatilitu, použijeme funkciu **FinancialDerivative**.

Riešenie: Požadovanú volatilitu získame nasledujúcim spôsobom

FinancialDerivative[{“**European**”, “**Call**”}, {“**StrikePrice**” → **60**,

“**Expiration**” → **0.3**}, {“**InterestRate**” → **0.04**, “**Value**” → **3.34886**

”**CurrentPrice**” → **58.5**}, “**ImpliedVolatility**”] $\Longrightarrow$ **0.29**,

kde parameter “Value” predstavuje tržnú hodnotu danej opcie.

2.2.4 Greeks - analýza citlivosti

Definícia 2.3. *Greeks* sú špeciálne meracie nástroje citlivosti (alebo rizika) hodnoty opcie (alebo opčnej prémie) vzhľadom ku faktorom, ktoré túto hodnotu ovplyvňujú. Greeks su väčšinou matematické derivácie hodnoty opcie (vypočítanej Black-Scholesovou metódou) podľa jednotlivých faktorov. Výsledné ukazovatele kvantifikujú a odhadujú lineárnu závislosť hodnoty opcie vzhľadom k danému faktoru (viď zdroj [3]).

- **Delta**

  Popisuje citlivosť ceny opcie na zmeny spotovej ceny podkladového aktíva.

$$\delta_t^c = \frac{\partial c_t}{\partial S_t} = \Phi(d_1) \qquad \delta_t^p = \frac{\partial p_t}{\partial S_t} = \delta_t^c - 1 = -\Phi(-d_1) \tag{2.26}$$

Hodnota ukazovateľa delta sa v prípade, ak sú kúpne opcie v peniazoch, blíži k jednej, kým u opciách, ktoré sú mimo peňazí sa delta blíži k nule a v oblasti na peniazoch sa pohybuje okolo 0,5. Kúpené call opcie majú kladné hodnoty delty, kým kúpené put opcie majú tieto hodnoty záporné.

- **Gamma**
  Faktor delta reaguje spoľahlivo len na relatívne malé zmeny spotovej ceny podkladového aktiva. Pri väčších zmenách dochádza k chybe, ktorej riešením je druhá derivácia ceny opcie podľa spotovej ceny opcie. Popisuje teda citlivosť ukazovateľa delta vzhľadom na zmeny spotovej ceny podkladového aktíva.

$$\gamma_t^c = \frac{\partial^2 c_t}{\partial S_t^2} = \frac{\varphi(d_1)}{\sigma S_t \sqrt{T-t}} \qquad \gamma_t^p = \frac{\sigma^2 p_t}{\sigma S_t^2} = \gamma_t^c \tag{2.27}$$

  Opcie s vysokou hodnotou gamma sú riskantné pre predávajúceho, keďže delta týchto opcií sa mení veľmi rýchlo.

- **Rho**
  Ukazovateľ rho vyjadruje citlivosť ceny opcie na zmeny bezrizikovej úrokovej miery.

$$\rho_t^c = \frac{\partial c_t}{\partial r} = \tau X e^{-r\tau} \Phi(d_2) \qquad \rho_t^p = \frac{\partial p_t}{\partial r} = -\tau X e^{-r\tau} \Phi(-d_2) \tag{2.28}$$

- **Theta**
  Theta popisuje citlivosť ceny opcie na zmenu doby do expirácie, t.j. meria zmeny časovej hodnoty opcie.

$$\theta_t^c = \frac{\partial c_t}{\partial t} = -\frac{\sigma S_t}{2\sqrt{\tau}} \varphi(d_1) - r X e^{-r\tau} \Phi(d_2) \qquad \theta_t^p = \frac{\partial p_t}{\partial t} = \theta_t^c + r X e^{-r\tau} \tag{2.29}$$

  Časová hodnota opcie postupne klesá a tento pokles je najbadateľnejší s blížiacou sa dobou expirácie, z čoho vyplýva, že opcia s dlhším časom do expirácie musí mať väčšiu hodnotu ako opcia s kratším časom do expirácie.

- **Vega**
  Sleduje ako vplýva zmena volatility podkladového aktiva na hodnotu opcie. Označuje sa gréckym písmenom ν.

$$\nu_t^c = \frac{\partial c_t}{\partial \sigma} = S_t \sqrt{\tau} \varphi(d_1) \qquad \nu_t^p = \frac{\partial p_t}{\partial \sigma} = S_t \sqrt{\tau} \varphi(d_1) \tag{2.30}$$

  Ak rastie volatilita, rastie aj cena opcie. Naopak pokles volatility spôsobuje pokles ceny opcie.

Implementácia v Mathematice

Prostredníctvom funkcie **FinancialDerivative** je možné počítať nástroje citlivosti zvané “Greeks”. Zoznam všetkých dostupných ukazovateľov Greeks (v čase t) opcie (napr. európskej call na akciu vyplácajúcu dividendy) dostaneme za pomoci predpisu

FinancialDerivative[{“**European**”, “**Call**”}, {“**StrikePrice**” → **X**, "**Expiration**" $\rightarrow \tau\}$, $\{$"**InterestRate**" $\rightarrow$ **r**, "**Volatility**" $\rightarrow \sigma$,

"**CurrentPrice**" $\rightarrow \mathbf{S_t}$, "**Dividend**" $\rightarrow$ **d**$\}$, "**Greeks**"].

Pritom výstup bude vyzerať nasledovne

$$\{Delta \rightarrow \delta_t^c,\ Gamma \rightarrow \gamma_t^c,\ Rho \rightarrow \rho_t^c,\ Theta \rightarrow \theta_t^c,\ Vega \rightarrow \nu_t^c\}.$$

Podobným spôsobom je možno vyjadriť nástroje citlivosti (Greeks) všetkých dostupných inštrumentov.

Aplikácia 2.8. Číselne vyjadrite hodnoty všetkých dostupných Greeks európskej call opcie na akciu spoločnosti DEC, ak

- expiračná cena $X = 60$ Kč,
- momentálna tržná cena $S_t = 58,5$ Kč,
- čas do expirácie $\tau = T - t = 0,3$ roka,
- volatilita akcie $\sigma = 0,29$ (29%),
- bezriziková úroková miera $r = 0,04$ (4%).

Riešenie: Najprv vypočítame jednotlivé hodnoty ukazovateľov prostredníctvom vzorcov vyplývajúcich z Black-Scholesovej metódy na oceňovanie opcií.

$$d_1 = \frac{\log(58.5/60) + \left(0.04 + \frac{1}{2}0.29^2\right)0.3}{0.29\sqrt{0.3}} = -0.00442464$$

$$d_2 = d_1 - 0.29\sqrt{0.3} = -0.163264,$$

z toho

- $\delta_\mathbf{t}^\mathbf{c} = \text{CDF[NormalDistribution}[0,1], d_1] = 0.498235$,
- $\gamma_\mathbf{t}^\mathbf{c} = (\text{PDF[NormalDistribution}[0,1], d_1])\ /\ \left(0.29 * 58.5\sqrt{0.3}\right) = 0.0429$,
- $\rho_\mathbf{t}^\mathbf{c} = 0.3 * 60\exp\{-0.04 * 0.3\}\,\text{CDF[NormalDistribution}[0,1], d_2] = 7.73936$,
- $\theta_\mathbf{t}^\mathbf{c} = -\,(0.29 * 58.5)\ /\ \left(2\sqrt{0.3}\right)\ \text{PDF[NormalDistribution}[0,1], d_1]$
  $-0.04 * 60\exp\{-0.04 * 0.3\}\,\text{CDF[NormalDistribution}[0,1], d_2] = -7.21022$,
- $\nu_\mathbf{t}^\mathbf{c} = 58.5\sqrt{0.3}\,\text{PDF[NormalDistribution}[0,1], d_1] = 12.7827$.

Teraz vypočítame požadované hodnoty s funkciou **FinancialDerivative**.

FinancialDerivative[$\{$"**European**", "**Call**"$\}$, $\{$"**StrikePrice**" $\rightarrow$ **60**,

"**Expiration**" $\rightarrow$ **0.3**$\}$, $\{$"**InterestRate**" $\rightarrow$ **0.04**, "**Volatility**" $\rightarrow$ **0.29**,

"**CurrentPrice**" $\rightarrow$ **58.5**$\}$, "**Greeks**"] $\Longrightarrow$ $\{$**Delta** $\rightarrow$ **0.498235**, **Gamma**

$\rightarrow$ **0.0429**, **Rho** $\rightarrow$ **7.73936**, **Theta** $\rightarrow$ **−7.21022**, **Vega** $\rightarrow$ **12.7827**$\}$

Záver: V oboch postupoch nám vyšli hodnoty ukazovateľov nasledovne: $\delta_t^c = 0,498235$, $\gamma_t^c = 0,0429$, $\rho_t^c = 7,73936$, $\theta_t^c = -7,21022$ a $\nu_t^c = 12,7827$.

3. Finančné dáta

Softvér Mathematica ponúka rozsiahly prístup k aktuálnym údajom z najrôznejších oblastí prostredníctvom vzdialených serverov. Charakter týchto údajov nie je obmedzený len na tradičné matematicky založené oblasti, ako je matematika, štatistika, astronómia, meteorológia, chémia, biológia, strojárstvo atď., ale aj na sociálne a politické vedy, ekonómiu, financie, zemepis a podobne. Tieto údaje môžu byť ďalej v Mathematice uložené pre analýzu a vizualizáciu. V tejto práci sa zameriame na finančné a ekonomické dáta.

Implementácia v Mathematice

Základnou funkciou na získavanie finančných dát je funkcia **FinancialData**. Medzi jej hlavné schopnosti patrí získavanie údajov o cenách akcií z rôznych búrz alebo podielových fondov, o burzových indexoch a o menových výmenných kurzoch.

3.1 Ceny akcií

Uvažujme napr. spoločnosť Microsoft. Potom poslednú známu hodnotu akcie Microsoftu získame príkazom **FinancialData**[“**MSFT**”] alebo **FinancialData**[“**NYSE : MSFT**”], kde NYSE predstavuje burzu na ktorej sa dané akcie obchodujú (v našom prípade New York Stock Exchange). Ak chceme sledovať vývoj cien akcií od určitého dátumu po aktuálny deň použijeme **FinancialData**[“**MSFT**”, {**rok**, **mesiac deň**}]. Ak chceme sledovať vývoj cien akcií použijeme **FinancialData**[“**MSFT**”, {{**začiatok**}, {**koniec**}}]. Pri týchto príkazoch dostaneme vo výstupe jednotlivé dátumy a im prislúchajúce hodnoty uzatvárajúce dané dni. Ceny akcií sú dané v menách, v ktorých sú inštrumenty kótované. Zoznam podporovaných búrz získame príkazom **FinancialData**[“**Exchanges**”] (momentálne je ich 64). Funkcia **FinancialData** vie okrem hodnôt akcií vyjadriť príkazom **FinancialData**[“**MSFT**”, “**vlastnosť**”] aj ich vlastnosti. Zoznam všetkých vlastností je možné nájsť v tutoriály Mathematici (viď zdroj [1]). Prostredníctvom týchto vlastností sa dá zistiť napr. ako sa zmenila hodnota akcie od poslednej uzatvárajúcej hodnoty (Change), najvyššia/najnižšia hodnota akcie v rámci aktuálneho dňa (High/Low), zmena ceny behom posledných 200 dní (Change200Day), volatilita za posledných 20 dní (Volatility20Day), priemyselné odvetvie, v ktorom firma pôsobí (Company) a mnoho ďalších užitočných informácií.

3.2 Burzové indexy

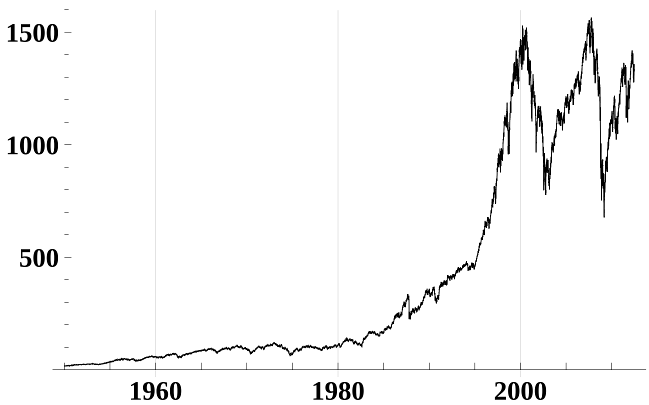
Burzový index je ukazovateľom vývoja daného trhu ako celku, slúži ku sledovaniu vývoja trhu v čase a jeho vývojovým tendenciám. Pretože burzový index odráža ako súčastný stav vývoja trhu, tak aj dlhodobý vývoj trhu s jeho tendenciami, je ho možné taktiež použiť ako určité meradlo úspešnosti dlhodobého vývoja výnosov z portfólia. Burzové indexy delíme na výberové (zahrňujú len vzorku akcií najvýznamnejších spoločností) a súhrnné (zahrňujú akcie všetkých spoločností na danom trhu). V závislosti na použitej metóde konštrukcie, je možné indexy rozdeliť na *cenovo* vážené, *hodnotovo* vážené a *rovnako* vážené indexy.

- Cenovo vážené indexy nezohľadňujú tržnú kapitalizáciu spoločností, ale vychádzajú len z aktuálnych cien jednotlivých akcií, t.j. akcie spoločností s vyššou cenu budú mať v indexe aj vyššiu váhu. Určitým typom váženého priemeru je Dow Jones Industrial Average, pri ktorom sa skutočná aktuálna hodnota počíta ako súčet cien akcií vydelený *deliteľom*, ktorý sa upravuje zakaždým, keď sa nejaké akcie rozdeľujú alebo vyplácajú dividendu. Tieto faktory teda nemajú vplyv na hodnotu indexu, ktorá tým pádom ostáva konzistentná.

- V hodnotovo vážených indexoch je každá akcia vážená podľa podielu svojej tržnej kapitalizácie na celkovej hodnote všetkých firiem. Hodnotu indexu teda neovplyvňuje len zmena ceny, ale aj počet emitovaných akcií. Patria sem napríklad S&P 500, Nasdaq Composite alebo Nasdaq 100.

- Rovnako vážený index je založený na princípe portfólia, kde každá akcia má rovnakú váhu.

Uvažujme index Dow Jones Industrial Average, ktorý je tvorený 30 americkými spoločnostami, ktoré zasahujú do priemyslu, médií, financií alebo výskumu nových tecnológií. Tieto spoločnosti pokrývajú asi štvrtinu tržnej kapitalizácie Newyorskej burzy. Zoznam spoločností patriacich do tohoto indexu získame príkazom **FinancialData**[“**^DJI**”, “**Members**”]. Teraz si znázorníme historický vývoj tohoto indexu **DateListPlot**[**FinancialData**[“**^DJI**”, “**All**”], **Joined** → **True**].



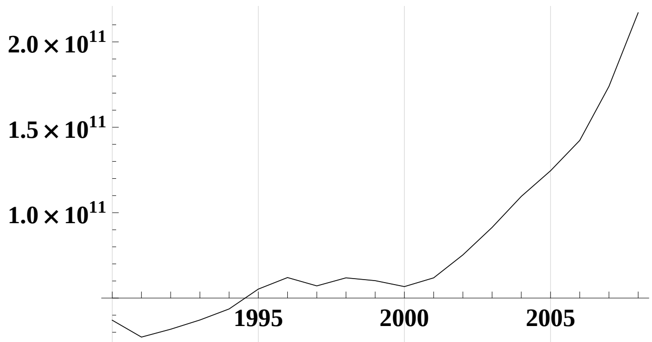
Obr. 3.1: Vývoj akciového indexu Dow Jones Industrial Average

3.3 Výmenné kurzy

Mathematica momentálne podporuje 161 peňažných mien a kurzov komodít. Ich zoznam získame prostredníctvom príkazu **FinancialData**[“**Currencies**”]. Ak chceme napríklad zistiť aktuálny výmenný kurz medzi eurom a českou korunou, zadáme príkaz **FinancialData**[“**EUR/CZK**”] alebo **FinancialData**[{“**EUR**”, “**CZK**”}]. Aktuálnu cenu jednej unce zlata v amerických dolároch vyjadríme prostredníctvom **FinancialData**[“**XAU/USD**”].

3.4 Ekonomické dáta

V tejto podkapitole si priblížime ďalšiu funkciu v Mathematice, funkciu **CountryData**. Táto funkcia dáva hodnoty špecifických vlastností krajiny, skupiny krajín (napr. G8), kontinentu alebo oceánu. Zoznam prípustných vlastností (**CountryData**[“**Properties**”]) obsahuje momentálne 223 položiek. Medzi týmito vlastnosťami sa nachádzajú základné charakteristiky krajín, kartografické vizualizácie, geografické informácie, demografické informácie, *ekonomické informácie* alebo informácie spojené s kultúrou, armádou, menou, vládou, dopravou, informačnými kanálmy, zdravotnou situáciou, prírodnými zdrojmi a podobne. My sa bližšie pozrieme na niektoré ekonomické charakteristiky, ktoré je táto funkcia schopná vyjadriť. Dostaneme ich zo vstupu
FinancialData[“**Krajina**”, “**vlastnosť**”]. Dôležitou položkou je napríklad *hrubý domáci produkt* (**FinancialData**[“**Krajina**”, “**GDP**”]). Za pomoci tohoto príkazu sa môžeme pozrieť napríklad na vývoj hrubého domáceho produktu Českej republiky za posledných pár rokov.



Obr. 3.2: Vývoj hrubej domácej produkcie Českej republiky

Následne máme možnosť pozrieť sa na podiely jednotlivých zložiek v tomto hrubom domácom produkte. Ich celý zoznam môžeme nájsť v tutoriáli Mathematici (zdroj [1]). Patria sem napríklad podiel poľnohospodárstva (AgriculturalValueAdded) alebo priemyslu (IndustrialValueAdded), spotreba vlády (GovernmentConsumption) a položky im podobné.

Giniho koeficient (GiniIndex) vyjadruje mieru rovnomernosti prerozdelenia bohatstva v krajine. Je jedným z najviac používaných nástrojov na meranie príjmovej nerovnosti. Je odvodený z Lorenzovej krivky. Giniho koeficient vyjadruje pomer plochy medzi nivelizovanou a skutočnou krivkou, ku celkovej ploche nachádzajúcej sa pod nivelizovanou krivkou. Môže nadobúdať hodnoty od 0 do 1. Čím viac sa blíži k 0, tým je rozdelenie rovnejšie a naopak, ak sa blíži k 1, hovoríme o absolútnej nerovnosti.

Pomocou tejto funkcie môžeme ďalej sledovať *vládny dlh* (GovernmentDebt), ročnú *zmenu inflácie* (InflationRate), zoznam hlavných *priemyselných oblastí* (MajorIndustries), podiel *nezamestnaných* (UnemploymentFraction), krajiny kam, čo a odkiaľ sa *exportuje* (ExportPartners, ExportCommodities, ImportPartners) a podobne.

Záver

Softvér Mathematica je v dnešnej dobe jedným z najvyvinutejších programov pre prácu s finančnými dátami. Obsahuje množstvo implementovaných funkcií pomocou ktorých možno ľahko a pohodlne prevádzať ako základné tak aj pokročilé výpočty z finančnej oblasti.

V práci sme sa zaoberali teoretickým výkladom základnej problematiky a uvádzali sme ako sú riešené jednotlivé problémy pomocou softvéru. Venovali sme sa predovšetkým výpočtu časovej hodnoty peňazí, finančným inštrumentom akými sú obligácie, akcie a finančné deriváty. Vysvetlili sme základné pojmy, vzťahy, ktoré medzi nimi platia a popísali sme pokročilejšie metódy, ktoré sa uplatňujú pri oceňovaní opcií. Výstupy získané z Mathematici sme porovnávali s teoretickými hodnotami a pre lepšie priblíženie sme dané skutočnosti a súvislosti ilustrovali na mnohých príkladoch z praxe.

V poslednej časti práce sme sa zamerali aj na výhodnú schopnosť Mathematici, ktorou je schopnosť získavať informácie z externých zdrojov. Opäť sme sa zamerali na dáta finančného charakteru s ekonomickým významom, akými sú napríklad hrubý domáci produkt či index nezamestnanosti.

Softvér Mathematica je v neustálom vývoji. Prebieha vylepšovanie existujúcich funkcií, oprava prípadných nedostatkov a implementácia nových výpočtových metód. Aktuálne ja na trhu verzia s číslom 8.0 a určite sa ešte máme načo tešiť.

Zoznam použitej literatúry

[1] WOLFRAM, Mathematica: *Wolfram Mathematica Tutorial Collection - Mathematics and Algorithms*. 2008.
WEB: $http://www.wolfram.com/learningcenter/tutorialcollection/MathematicsAndAlgorithms/$.

[2] HURT, Jan: *Výpočetní prostředky finanční a pojistné matematiky LS 2011/2012*.
WEB: $http://www.karlin.mff.cuni.cz/\ hurt/VPFPM2012.nb$.

[3] CIPRA, T.: *Financial and Insurance Formulas*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.

[4] HULL, John C.: *Options, futures, and other derivatives*. 7th edition. Pearson Prentice Hall, 2009.

[5] BLAHA, Zdenek S., JINDŘICHOVSKÁ, Irena: *Opce, swapy, futures*. 2. vydání. Financial Economics Associates, 1997.

[6] DUPAČOVÁ, J., HURT, J., ŠTĚPÁN, J.: *Stochastic Modeling in Economics and Finance*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[7] ŠVEC, Martin: *Oceňování opcí*. Bakalářská práce, MFF UK, 2008.

[8] CIPRA, T.: *Matematika cenných papírů*. HZ Praha, spol. s.r.o., Praha, 2000.

[9] JELENOVÁ, Klára: *Sbírka úloh z finanční matematiky*. Bakalářská práce, MFF UK, 2009.